

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026

CLASA A X-a

SUBIECTUL I (40 de puncte)

Pentru fiecare dintre următoarele 10 probleme, una singură dintre cele cinci variante de răspuns este corectă. Pe formularul de înregistrare a răspunsurilor la problemele cu alegere multiplă (grilă), indică varianta corectă de răspuns:

(4p) 1. Calculând $1 + i + i^2 + \dots + i^{2026}$ se obține:

- A. 1 B. i C. $-i$ D. -1 E. 0

(4p) 2. Dacă $2\lg(2x - 3y) = \lg x + \lg y$, atunci valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este egală cu:

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 1 sau $\frac{9}{4}$ D. $\frac{9}{4}$ E. $\frac{2}{3}$

(4p) 3. Dacă $a = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ și $E(x) = x^3 + 3x$, atunci valoarea $E(a)$ este egală cu:

- A. 14 B. 12 C. 10 D. 2 E. 3

(4p) 4. Notăm cu g inversa funcției bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = 2026^x + 1$. Atunci $g(2)$ este egal cu:

- A. 2 B. 2026 C. 0 D. 2027 E. 1

(4p) 5. Afizele a trei dintre vârfurile unui pătrat sunt $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -2 - 2i$, $z_3 = 3 + i$. Al patrulea vârf al pătratului are afixul egal cu:

- A. $z = 2 + 3i$ B. $z = 3 - 2i$ C. $z = -2 + 3i$ D. $z = 3 - 3i$ E. $z = 2 - 3i$

(4p) 6. Se consideră expresia $E(x) = \left(\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^{-3}}}\right)^a \cdot \left(\sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^{-4}}}\right)^b$, $x > 0$.

Numărul perechilor $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pentru care $E(x) = x$ este egal cu:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

(4p) 7. Mulțimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x < 2 \\ x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$ este injectivă este egală cu:

- A. $(0, \infty)$ B. $(1, \infty)$ C. $(0, 1]$ D. $(0, 1)$ E. $[1, \infty)$

(4p) 8. Dacă $a = \log_{30} 5$, atunci expresia numărului $b = \log_{30}(7, 2)$ în funcție de a este:

- A. $2 - 3a$ B. $2 + 3a$ C. $3a - 2$ D. $a + 3$ E. $3a + 2$

(4p) 9. Fie ecuația $x^2 + x \cdot (2^x - 13) - 2^{x+1} + 22 = 0$. Suma modulelor soluțiilor ecuației este egală cu:

- A. 13 B. 22 C. 2 D. 5 E. 16

(4p) 10. Suma cuburilor soluțiilor ecuației $3\sqrt[3]{3x+2} = x^3 - 2$ este egală cu:

- A. -1 B. -7 C. 8 D. -2 E. 6

La subiectele II și III scrieți rezolvările complete:

SUBIECTUL II (25 de puncte)

Arătați că:

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, pentru orice $a, b > 0$;

b) $\log_a \left(\frac{2b}{a+b} \right) + \log_b \left(\frac{2a}{a+b} \right) \geq 0$, pentru orice $a, b \in (0, 1)$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10 / 2025

SUBIECTUL III (25 de puncte)

Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 , cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

a) Dacă $z_1 z_2 z_3 \neq -1$ și $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_1 z_3}{1 + z_1 z_2 z_3}$, arătați că $\operatorname{Re}(z) = 0$

b) Dacă $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ și $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, atunci calculați $|z_1 + z_2 + z_3|$.

Note: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru: 3 ore.